eTopoi Journal for Ancient Studies

Volume 4 (2015), pp. 1–17

Hagan Brunke

Überlegungen zu Raumerfassung und Flächenrechnung in Mesopotamien

Communicated by Klaus Geus

Received December 1, 2014
Revised May 11, 2015
Accepted May 11, 2015
Published June 17, 2015

Edited by Gerd Graßhoff and Michael Meyer,
Excellence Cluster Topoi, Berlin

eTopoi ISSN 2192-2608
http://journal.topoi.org

Hagan Brunke

Überlegungen zu Raumerfassung und Flächenrechnung in Mesopotamien

Communicated by Klaus Geus

Aus dem südlichen Mesopotamien stammen die ältesten schriftlichen Zeugnisse für die quantitative Erfassung der Umwelt des Menschen. Die frühesten Urkunden dieser Art stammen aus dem ausgehenden 4. und dem beginnenden 3. Jahrtausend v. Chr. und handeln von der Vermessung von Feldern und der Berechnung ihrer Flächen. In der Folgezeit entwickeln sich im Zuge der komplexer werdenden Verwaltung die Methoden der Verarbeitung quantitativen Datenmaterials kontinuierlich weiter. Spätestens mit dem ausgehenden 3. Jahrtausend beginnt die Auseinandersetzung mit zunehmend von den konkreten Gegebenheiten der realen Umwelt losgelösten räumlichen Konzepten und die Betrachtung geometrischer Strukturen um ihrer selbst willen. Sie ist ein wichtiger Impulsgeber für die Entwicklung der Mesopotamischen Mathematik.

Mesopotamien; Mathematik; Maß und Messen; Erfassung von Raum; Flächenrechnung; irreguläres/allgemeines Viereck

Southern Mesopotamia provides us with the oldest written documents quantitatively recording the environment of men. The first ones date to the end of the 4th and the beginning of the 3rd millennium BC and record field surveys and area computations. At the latest in the ending 3rd millennium there must have begun the occupation with more and more abstract geometric structures and general spatial concepts. This is of great importance for the development of Mesopotamian Mathematics.

Mesopotamia; Mathematics; Measure and Measurement; Recording of Space; Area Computation; Irregular/General Quadrilateral

1 Der betrachtete Gegenstand

Bereits aus der Zeit der Schriftentstehung im ausgehenden 4. Jahrtausend v. Chr. finden sich mit Texten zur Feldvermessung die ersten Dokumente zur Erfassung von Raum in Mesopotamien. Mit *Raum* ist dabei zunächst der konkrete natürliche, umgebende Raum gemeint, und zwar in seiner *a priori* zweidimensionalen Wahrnehmung als Oberfläche, in bzw. auf der der Mensch siedelt, sich bewegt und handelt. Diese „Aktionsoberfläche" soll dabei sowohl im Kleinen, als unmittelbar erfahrene Umgebung (z. B. eine Stadt und das nähere Umland), wie auch im Großen betrachtet werden. Im Weiteren wird der Begriff „Raum" dann auch auf die Abstraktionen des realen Raumes ausgedehnt, die im Laufe der Verfeinerung des gedanklichen Umgangs mit ihm entstanden und schließlich zum Gegenstand und auch zum Motor einer hochentwickelten Mathematik geworden sind.

Erfassung von Raum meint die Transformation dieser natürlichen umgebenden Realität in ein gedankliches und damit bereits von der Realität abstrahiertes Konzept, hier vor allem ihre Umsetzung in ein System quantifizierbarer Größen, ihre Messbarmachung, und schließlich die Methoden der Quantifizierung selbst. Die gesellschaftliche Relevanz dieser Raumerfassung besteht vor allem in ihrer normativen Kraft und dem daraus resultierenden Potential zur Etablierung und Festigung administrativer und rechtlicher Strukturen. Die systematische Natur der Erfassung des Raumes resultiert mittelbar in seiner Wahrnehmung als ein prinzipiell beherrschbares, d.h. geplant veränder- und gestaltbares Medium.

In der keilschriftlichen Dokumentation manifestiert sich diese Raumerfassung zunächst in Texten zur Vermessung und Berechnung landwirtschaftlich genutzter Flächen. Die Information über die Abmessungen und den Flächeninhalt eines Feldes kann in rein schriftlicher Form vorliegen. Aus späterer Zeit sind auch Pläne oder Skizzen der aufzunehmenden Entitäten bezeugt. So finden sich Feldpläne, Gebäudegrundrisse, Stadtpläne und Landkarten. Damit spielt Visualisierung eine wesentliche Rolle bei der Veranschaulichung ebenso wie bei der Abstraktion räumlicher Strukturen, bei ihrer Quantifizierung, und schließlich beim Prozess der Loslösung räumlicher Strukturen von der realen Welt, der als wesentlich für die Entwicklung der mesopotamischen Mathematik anzusehen ist.

2 Maß und Messen

Wesentliches Element von Raumerfassung im oben definierten Sinn ist die Quantifizierung räumlicher Entitäten, also von Objekten im Raum oder von Teilen des Raums selbst. Letztere sind in unserem Fall zunächst Teile der realen Aktionsoberfläche, z.B. Felder oder Teile davon, ebenso wie deren Begrenzungslinien, Wege etc. Quantifizierung wiederum bedeutet die Zuweisung von (eindeutig bestimmten) Größenwerten an diese räumlichen Entitäten. Mithin erfordert Quantifizierbarkeit die Existenz eines Konzepts der Größe von Raum.

Ein derartiges Konzept – und die Regeln oder Vorschriften für die Zuweisung von Größenwerten an räumliche Entitäten[1] – genügt bestimmten aus der praktischen Erfahrung oder allgemeiner Beobachtung abgeleiteten Grundeigenschaften. So wird einem Flächenstück, das vollständig in einem anderen enthalten ist, ein geringerer Größenwert zugewiesen als diesem (Isotonie). Und man weist einem Objekt, nachdem es im umgebenden Raum verschoben oder gedreht wurde, denselben Größenwert zu wie vorher (Invarianz).

Weniger selbstverständlich ist zunächst vielleicht die Additivität der Größenwerte. Damit ist gemeint, dass der Gesamtheit mehrerer Entitäten, die nicht ineinander übergreifen, als Größenwert die Summe der Größenwerte der einzelnen Entitäten zugewiesen wird. Man wird z.B. der Gesamtheit zweier Bäume mit 20 und 30 m Höhe nicht ohne Weiteres eine Höhe von 50 m zuordnen. Erst durch einen gewissen Grad an Abstraktion, wenn es nicht mehr um die ausdrücklich vertikale Ausdehnung der Gesamtheit (zwei Bäume) geht, sondern beispielsweise um die Gesamtmenge an Holz, das die beiden Bäume liefern, wenn man also von der konkreten vertikalen Höhe zum abstrakteren Konzept der allgemeinen Länge übergeht, ergibt sich die Additivität der Größenwerte beinahe zwingend. Dies ist besonders immer dann der Fall, wenn die Quantifizierung einer bestimmten Klasse von Entitäten im Rückbezug auf die Quantifizierung einer anderen Klasse von Entitäten begründet ist, deren Größenwerte selbst bereits additiv sind. Im Fall von Feldflächen etwa wird sich die Additivität der Größenwerte (Flächeninhalte) aus dem Rückbezug auf die Quantifizierung von Ernteerträgen und Saatgutmengen ergeben haben.

Sind diese Eigenschaften erfüllt, kann die Zuweisung der Größenwerte durch Messung erfolgen, d.h. mittels eines Maßstabs, einer einmal festgelegten Bezugsentität. Im Fall der Längenmessung ist das ein Bezugs-Streckenstück, etwa die Strecke entlang der Elle oder des Fußes des Königs oder irgendeines anderen Objekts (wie z.B. des „Urmeters“

1 Für allgemeine Überlegungen hierzu siehe Brunke 2011 und Brunke 2012b.

in Paris). Diese Bezugsstrecke dient dann als Maßeinheit, z.B. „Elle" oder „Fuß. Der Größenwert einer geraden Strecke, ihre Länge, ist definiert als die Anzahl der Kopien dieses Bezugs-Streckenstücks (und in einem zweiten Schritt auch von Bruchteilen davon), die – lückenlos und überschneidungsfrei aneinandergelegt – in der Strecke Platz finden.

Analog beruht die Flächenmessung auf der Festlegung eines Flächenmaßstabs, also eines Bezugs-Flächenstücks. Der Größenwert (Flächeninhalt) eines Flächenstücks ist jetzt die Anzahl der Kopien des Einheitsflächenstücks (und Bruchteilen davon), die in das Flächenstück – lückenlos und überschneidungsfrei aneinandergelegt – hineinpassen. Die „natürliche" Wahl ist die eines Bezugs-Quadrats. Damit hat z.B. ein Rechteck, das aus b Reihen von je l Einheitsquadraten besteht und somit aus $b \cdot l$ Einheitsquadraten zusammengesetzt ist, wegen der Additivität des Flächenmaßes den Flächeninhalt „$b \cdot l$ Einheitsquadrate". Wird die Flächenmessung an die Längenmessung gekoppelt, indem als Einheitsquadrat dasjenige Quadrat gewählt wird, dessen Kantenlänge gerade das Einheits-Längenstück ist, lässt sich der Inhalt $b \cdot l$ des Rechtecks verstehen als „Anzahl der Einheitslängenstücke in der Breite mal Anzahl der Einheitslängenstücke in der Länge", d.h. als „Breite mal Länge".[2] Dieses elementare Konzept der Größe und Größenmessung von Linien und Flächen gestattet noch keine unmittelbare Behandlung gekrümmter Linien und krummlinig begrenzter Flächen. In der Praxis der Feldvermessung bediente man sich naheliegender Approximationen der gekrümmten Linien durch Streckenzüge und der krummlinig begrenzten Flächenstücke durch solche, die durch Streckenzüge begrenzt sind. Dagegen hat man im Fall der „abstrakten Räume" der Mesopotamischen Mathematik von derartigen konkreten Approximationen losgelöste Konzepte verfolgt; siehe dazu unten.

Vom Begriff der Länge einer Strecke grundsätzlich zu unterscheiden ist der des Abstandes oder der Entfernung zweier Orte. Dabei gibt es eine Reihe verschiedener Möglichkeiten, diesen Abstand zu definieren,[3] von denen die Länge der geraden Verbindungsstrecke („Luftlinie") zwischen ihnen nur eine ist. Eine weitere Möglichkeit ist, die Länge einer anderen die beiden Orte verbindenden Linie als deren Abstand festzulegen, z.B. einer tatsächlichen Reiseroute, die in der Realität stets mehr oder weniger stark von der geraden Verbindungsstrecke abweicht.[4] Dies ist eine für praktische Belange wesentlich sinnvollere und darüber hinaus auch natürlichere Definition als die über die Länge der kürzesten Verbindungsstrecke: ersteres, weil sie die tatsächlich von einem Reisenden, einem Händler oder einem Heer zurückzulegende Strecke zugrunde legt, und letzteres, weil die „Entfernung Luftlinie" für große Distanzen mit den damaligen Mitteln überhaupt nicht direkt gemessen werden konnte.

Ein anderes praktisches Maß für den Abstand zweier Orte ist die Zeit, die man benötigt, um – etwa auf der bevorzugten Reiseroute – von einem Ort zum anderen zu gelangen. Auch heute ist die wichtigste Information in einem Bahnfahrplan nicht die

2 Es ist wichtig zu bemerken, dass eine solche Koppelung und damit besonders die Formel „Rechtecksflächeninhalt = Breite mal Länge" nicht zwingend und auch keineswegs von vorne herein selbstverständlich ist. Für praktische Zwecke ist es allerdings sehr nützlich und sinnvoll, den Inhalt eines Feldes rechnerisch aus den Längen z.B. seiner Begrenzungslinien ermitteln zu können.

3 Damit soll nicht angedeutet werden, dass man sich im alten Orient strenger Definitionen im modernen Sinn bedient hätte. Vielmehr scheint das, was der Textbefund an Charakteristika der Mesopotamischen Wissenschaften ganz allgemein auszumachen gestattet, auf das Vorherrschen „impliziter Definitionen" hinzudeuten, im Sinne von Übereinkünften, beruhend auf aus der praktischen Erfahrung geborenen Einsichten.

4 Ein wichtiger Unterschied zwischen der Länge einer Strecke und dem Abstand zweier Orte ist, dass letzterer nicht mehr additiv ist, selbst dann nicht, wenn man als Abstand je zweier Orte die Länge ihrer geraden Verbindungsstrecke wählt: Der Abstand zweier Orte A und C, die über den Umweg eines Ortes B verbunden sind, ist im Allgemeinen nicht die Summe des Abstandes von A nach B und des Abstandes von B nach C. Derartige Fragen sind wichtig z.B. beim Versuch der Rekonstruktion antiker Geografie aus überlieferten Entfernungsangaben.

Entfernung Luftlinie zwischen zwei Orten und auch nicht die tatsächliche Länge des Schienenwegs, sondern die zu erwartende Reisezeit. Es ist zu beachten, dass bei dieser Entfernungs-Definition verschiedenen Wegstrecken zwischen zwei Orten im Allgemeinen verschiedene Werte für die Entfernung entsprechen und daher „die" Entfernung zwischen zwei Orten nicht mehr allein von diesen abhängt. Damit liegt insbesondere keine „Abstandsfunktion" im mathematischen Sinne vor. Auch ist der so definierte Abstand zwischen zwei Orten – im Gegensatz zur Länge der sie verbindenden Strecke – im Allgemeinen von der Richtung abhängig: Eine Reise entlang derselben Strecke dauert flussaufwärts länger als flussabwärts, bergauf länger als bergab etc.

Dies macht deutlich, dass die pragmatischen Konzepte von Abstand einerseits für die quantitative Erfassung und Beschreibung großräumiger Strukturen sehr sinnvoll sind, dass sie aber andererseits mit einer Reihe von inhärenten Uneindeutigkeiten und Ungenauigkeiten behaftet sind, die ihre Anwendbarkeit auf lokale Strukturen, besonders für deren administrative Erfassung und Steuerung, bei der es auf Genauigkeit und Vergleichbarkeit, mithin insbesondere auf Eindeutigkeit ankommt, erheblich einschränkt, wenn nicht völlig ausschließt.

Entsprechend kommt in der keilschriftlichen Dokumentation die eigentliche Längenmessung nur „im Kleinen" zur Anwendung, etwa bei der Vermessung von Grundstücken, landwirtschaftlichen Nutzflächen etc. „Im Kleinen" heißt dabei nicht, dass die auftretenden Längen nicht groß gewesen sein konnten – bis zur Größenordnung von einigen danna („Meile", ca. 10,8 km) –, sondern dass es sich um überschaubare Einheiten dessen handelt, was oben als „Aktionsoberfläche im Kleinen" bezeichnet wurde, also innerhalb des unmittelbaren Aktionsradius einer lokalen Gesellschaft liegt. Größere Entfernungen hingegen sind – ohnehin sehr selten quantitativ dokumentiert – im Zeitmaß angegeben, etwa in den Texten, die mit Dietz Otto Edzard als Itinerare im weiteren Sinn bezeichnet werden können.[5] Diese sind, wie bereits erwähnt, mit einer recht großen Ungenauigkeit behaftet und gerade bei langen und über mehrere Stationen führenden Routen bestenfalls als Richtwerte zu gebrauchen, was für die wichtigsten praktischen Belange genügt haben mag.

Zusammenfassend lässt sich – trotz Unvergleichbarkeit der Befundlage – sagen, dass die Unterscheidung der beiden verschiedenen Erfassungskonzepte „Länge" und „Abstand" im Wesentlichen mit dem Unterschied zwischen der Aktionsoberfläche „im Kleinen" und der „im Großen" korrespondiert.[6]

3 Reale Räume

Messung und Zuweisung von Größenwerten an landwirtschaftlich genutzte Flächen sind bereits in den frühesten bekannten Verwaltungstexten des ausgehenden 4. Jahrtausends dokumentiert. Zu ihnen gehören beispielswele zwei Texte aus Djemdet Nasr[7] mit Angaben zu verschiedenen Feldeinheiten. Jede dieser Angaben umfasst drei Register, deren erste beide je eine Längenmaßangabe enthalten, die durch Setzung eines waagerechten

5 Edzard 1976-80. Ein Beispiel für die quantitative Erfassung größerer Gebiete mit expliziten Längenangaben in Meilen findet sich in einem bislang durch zwei Vertreter (einer neuassyrisch, einer spätbabylonisch) bekannten geographischen Text, in dem das Reich König Sargons von Akkad beschrieben wird (The Sargon Geography, Horowitz 1998, 67–95).

6 Vgl. auch die Ausführungen in Robson 2008, 60ff. insbesondere S.63: „Quantitative descriptions are given only in the rare cases where there are no manmade features on the landscape to serve".

7 Ashm. 1926, 577 und Ashm. 1926, 583. Publiziert in Langdon 1928, Texte 83 und 100; Englund und Grégoire 1991, Texte 3 und 2. Reproduziert und besprochen in Nissen, Damerow und Englund 1991, 97–99 als Kat.Nr. 12.2 und 12.1; letzterer auch in Damerow 2001, 250-251. Fotos und weitere Informationen auf CDLI (Cuneiform Digital Library Initiative) unter `http://cdli.ucla.edu/P005070` und `http://cdli.ucla.edu/P005069`.

bzw. senkrechten Keils als „Länge“ und „Breite“ eines (zumindest annähernd) rechteckigen Flächenstücks gekennzeichnet sind. Das jeweils dritte Register enthält den aus diesen Angaben errechneten Flächeninhalt.[8] Dieser wird durch Multiplikation der beiden angegebenen Längenmaße ermittelt, was zeigt, dass die Koppelung von Flächen- und Längenmaß hier bereits vollzogen war.

Ein Beispiel für die Behandlung von Feldflächen in Gestalt irregulärer Vierecke aus dieser Zeit stammt aus Uruk.[9] Auch hier sind die Längenangaben durch senkrechte und waagerechte Keile als „Längen“ und „Breiten“ gekennzeichnet, allerdings sind jetzt für jedes der beiden betrachteten Vierecke je zwei verschiedene Längen- und Breitenwerte gegeben. Der Text gibt keine Werte für die Flächeninhalte, es ist aber bekannt, dass die Inhalte irregulärer Vierecke berechnet wurden, indem man die Mittelwerte gegenüberliegender Längenangaben multiplizierte.[10] Ein schönes Beispiel aus späterer Zeit bietet ein altbabylonischer Schultext[11] mit der Zeichnung eines irregulären Vierecks mit Längen- und Flächenangaben. An den einander gegenüberliegenden Seitenpaaren sind außen die sexagesimal notierten Längenangaben 03 20 und 02 40 bzw. 01 40 und 01 20 vermerkt; der Flächeninhalt 04 30, berechnet aus $\frac{03\ 20+02\ 40}{2} \cdot \frac{01\ 40+01\ 20}{2}$, ist im Innern des Vierecks notiert.

Interpretiert man, wie allgemein üblich, die an den Vierecksseiten notierten Längenangaben als die *Seitenlängen* des Vierecks, liefert dieses Verfahren nach heutigem Verständnis falsche Ergebnisse.[12] Im Folgenden soll über eine andere Deutung des Verfahrens spekuliert werden. Nimmt man an, dass der Entwicklung eines Konzepts der Größe von Feldflächen das Anliegen zugrunde lag, ihre Bewirtschaftung quantitativ zu fassen und zu planen, besonders die zu erwartenden oder zu erzielenden Ernteerträge, die bereitzustellenden Saatgutmengen und Arbeitskräfte etc., so basierte die gewissermaßen erste Version dieses Größenkonzepts vermutlich unmittelbar auf den praktischen Gegebenheiten des Feldbaus. Damit könnte die Entsprechung eines Bezugsflächenstücks ein Exemplar der angebauten Pflanze – oder sekundär eine größere, analog zu verstehende Einheit – gewesen sein, bzw. der Platz, den diese im Mittel benötigt. Da die Pflanzen in regelmäßig angeordneten Reihen angebaut worden sein dürften, mit einem mehr oder weniger festgelegten Abstand zwischen den einzelnen Pflanzen, ergibt sich auf der bewirtschafteten Fläche ein regelmäßiges Muster in Gestalt eines mutmaßlich rechtwinkligen Gitters.
Wenn der Feldmesser bei seiner praktischen Arbeit die Seiten des Feldes abschreitet und dabei die von der jeweiligen Seite abgehenden Pflanzreihen zählt, misst er damit *de facto* die Länge der zugehörigen auf der Richtung der Pflanzreihen senkrecht stehenden Strecke, welche er dann beispielsweise auf einem Plan längs der abgeschrittenen Seite vermerkt (Abb. 1).[13] Angenommen, der Feldvermesser schreitet das Feld, das die Gestalt eines unregelmäßigen Vierecks wie in Abb. 1 haben möge, gegen den Uhrzeigersinn ab,

8 Für eine detaillierte Analyse dieser Berechnungen und der auftretenden Fehler und Rundungen, ebenso wie der verwendeten Maßeinheiten siehe Nissen, Damerow und Englund 1991, 97–99.

9 W 19408,76+. Publiziert in Green und Nissen 1987, Tafel 59; Englund und Nissen 2001, Tafel 14. Besprochen in Nissen, Damerow und Englund 1991, 98 als Kat.Nr. 12.4; Damerow 2001, 257–260. Foto und weitere Informationen auf CDLI (Cuneiform Digital Library Initiative) unter `http://cdli.ucla.edu/P003118`.

10 Tatsächlich ergibt dieses Verfahren für beide Vierecke von W 19408,76+ denselben Wert für den Flächeninhalt. Die einzelnen Längenangaben sind verschieden, aber die relevanten Mittelwerte stimmen überein. Siehe z.B. die Ausführungen in Nissen, Damerow und Englund 1991, 98.

11 YBC 3892. Publiziert in Clay 1915, Text 21, Tafel 13. Foto und weitere Informationen auf CDLI (Cuneiform Digital Library Initiative) unter `http://cdli.ucla.edu/P142060`.

12 Einen korrekten Wert erhält man nur in dem Spezialfall, dass das „irreguläre“ Viereck ein Rechteck ist, in allen anderen Fällen ist der Wert zu groß und stellt eine für die Praxis akzeptable Näherung lediglich dann dar, wenn die Gestalt des Vierecks nicht allzusehr von der eines Rechtecks abweicht.

13 Natürlich ist es in diesem Zusammenhang völlig unerheblich, ob bei der Aufnahme des Feldes tatsächlich eine Zeichnung angefertigt oder ob die Zuordnung der gemessenen Längenmaße an die Vierecksseiten lediglich schriftlich festgehalten wird.

wobei er mit der unteren Seite beginnt. Die Pflanzreihen mögen parallel und senkrecht zu dieser Seitenlinie verlaufen. Die dann der Reihe nach ermittelten Längen (in Abb. 1 als a, b, c, d bezeichnet), die vielleicht auf einer Skizze an den entsprechenden Vierecksseiten notiert werden, sind – in dieser Reihenfolge – die Längen der schwarzen, grünen, roten und blauen Strecke in Abb. 1. Insbesondere gewinnt der Feldvermesser auf diese Weise beim Abschreiten der in der Zeichnung rechten bzw. linken Seite automatisch einen Wert für die Länge dessen, was wir die auf der Grundlinie a senkrecht stehenden *Höhen* (b bzw. d) des Feldes nennen (und nicht etwa für die *Seitenlängen*; analog für c), und zwar vollkommen unabhängig davon, welche Winkel die seitlichen Feldbegrenzungen mit der Grundlinie tatsächlich einschließen. Damit wäre insbesondere ein wie immer geartetes Konzept des Winkels für eine dennoch auch nach dem Verständnis unserer modernen Geometrie korrekte Flächenberechnung (siehe gleich) überhaupt nicht erforderlich.[14] Auch die Koppelung der Flächen- an die Längenmessung findet so eine einfache Erklärung.

Durch die beiden Höhen b und d wird die Figur in ein Trapez und zwei Dreiecke zerlegt. Das Trapez hat die Grundlinien b und d und die Höhe c. Sein Flächeninhalt ist damit

$$F_{\text{Trapez}} = \frac{b+d}{2}\,c\,.$$

Die Grundlinien der beiden Dreiecke ergeben zusammen die Differenz aus a und c. Wenn α (wobei $0 \leq \alpha \leq 1$ gilt) denjenigen Bruchteil von $a-c$ bezeichnet, der auf die Grundlinie des linken Dreiecks entfällt, hat diese Grundlinie die Länge $\alpha(a-c)$. Die Länge der Grundlinie des rechten Dreiecks ist dann natürlich gerade $(1-\alpha)(a-c)$. Man überzeuge sich davon, dass dann die Summe der beiden Grundlinien tatsächlich $a-c$ ist. Die Höhen von linkem und rechtem Dreieck sind d bzw. b, so dass sich die Flächen der beiden Dreiecke zu

$$F_{\text{links}} = \frac{1}{2}[\alpha(a-c)]d \qquad \text{und} \qquad F_{\text{rechts}} = \frac{1}{2}[(1-\alpha)(a-c)]b$$

ergeben. Unter der vereinfachenden (approximierenden) Annahme, dass die beiden über c „überstehenden“ Abschnitte von a sich gleichmäßig auf beide Seiten außerhalb des Trapezes verteilen, beide Dreiecks-Basen also gleich lang sind (Abb. 3) und damit $\alpha = \frac{1}{2}$ ist, ergibt sich für die Dreiecksflächen

$$F_{\text{links}} = \frac{1}{2}\,\frac{a-c}{2}\,d \qquad \text{und} \qquad F_{\text{rechts}} = \frac{1}{2}\,\frac{a-c}{2}\,b\,.$$

Die Gesamtfläche des Vierecks ist dann

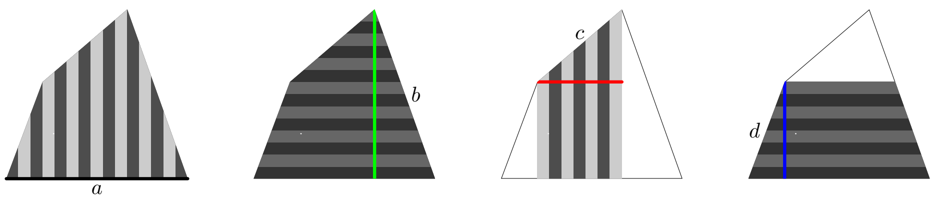


Abb. 1 | Bestimmung der Längen aufeinander senkrecht stehender Strecken durch Abschreiten der Seitenlinien eines unregelmäßigen Vierecks.

14 Der keilschriftliche Befund für die mesopotamische Geometrie gestattet kein dem unseren vergleichbares Konzept des Winkels nachzuweisen und besonders auch keinen Begriff dafür.

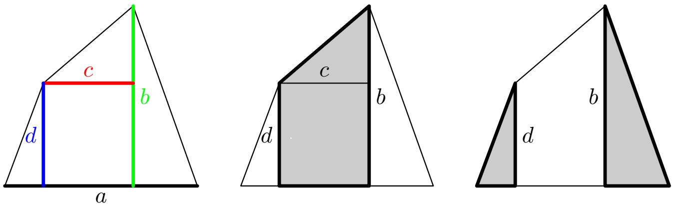


Abb. 2 | Berechnung der Vierecksfläche aus den durch Messung erlangten Streckenlängen.

$$
\begin{aligned}
F &= F_{\text{Trapez}} + F_{\text{links}} + F_{\text{rechts}} \\
&= \frac{b+d}{2}\,c + \frac{1}{2}\,\frac{a-c}{2}\,(b+d) = \frac{b+d}{2}\,(c + \frac{a-c}{2}) = \frac{b+d}{2} \cdot \frac{a+c}{2}\,,
\end{aligned}
$$

also gerade das *Produkt der Mittelwerte der an gegenüberliegenden Seiten notierten Längenmaße*, bei denen es sich – es sei nochmals ausdrücklich betont – hier (mit Ausnahme der Längenangabe a) nicht um die Seitenlängen des Vierecks handelt, sondern um die Längen eines Systems aufeinander senkrecht stehender Strecken.[15]

In dem Spezialfall, dass es sich bei dem betrachteten Viereck um ein Trapez wie in Abb. 4 handelt, liefert das vorgestellte Verfahren *in jedem Fall* den korrekten Wert für den Flächeninhalt, auch ohne die vereinfachende Annahme $\alpha = \frac{1}{2}$. Denn a und c sind dann die tatsächlichen Längen der beiden Parallelseiten, b und d (und damit auch ihr Mittelwert) die Höhe. Es bleibt zu bemerken, dass das angegebene Herleitungsverfahren für Vierecke mit zwei *gegenüberliegenden* stumpfen Winkeln nicht anwendbar ist und die Formel $F = \frac{b+d}{2} \cdot \frac{a+c}{2}$ für solche Vierecke im Allgemeinen[16] auch falsch ist.

Die mit der wachsenden Komplexität der zu verwaltenden Einheiten einhergehende Weiterentwicklung administrativer Techniken führt im Laufe der Zeit zu einem immer höheren Maß an Abstraktion und mit ihm zu einer substanziellen Weiterentwicklung des Verständnisses von Raum. Spätestens im ausgehenden 3. Jahrtausend sind die Vorstellung vom Raum und die Methoden des Umganges mit ihm und seiner Manipulation auf einem Niveau angelangt, das ihre Entwicklung weg von real-räumlichen Strukturen hin zu abstrakten, zunächst nur gedanklich existierenden Gebilden ermöglicht. Die mesopotamische Mathematik scheint sich von hier aus sehr schnell entwickelt zu haben. Die eindrucksvollsten Zeugnisse administrativer Raumerfassung sind die bereits angespro-

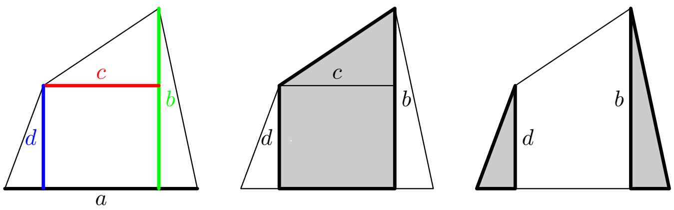


Abb. 3 | Vierecksfläche im Fall der vereinfachenden Annahme $\alpha = \frac{1}{2}$.

15 Einen anderen Erklärungvorschlag für die Entstehung dieser Formel, und zwar unter der Annahme, dass die notierten Längenangaben tatsächlich die Längen der *Seiten* des Vierecks sind, macht Damerow 2001, 258f., 282ff.

16 Nämlich dann, wenn kein Paar paralleler Seiten existiert, es sich also nicht um ein Parallelogramm oder allgemeiner ein „überhängendes“ Trapez handelt.

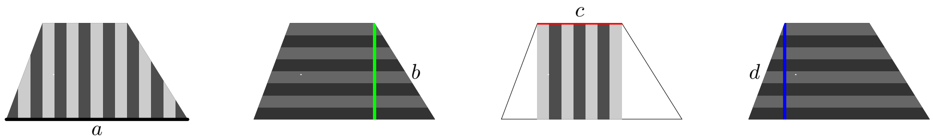


Abb. 4 | Das Verfahren im Spezialfall Trapez.

chenen Ur III-zeitlichen Feldpläne. [17] Ein Feld mit unregelmäßiger äußerer Begrenzung wird in einfach berechenbare Teile zerlegt, also in solche, denen auf einfache Weise ein Größenwert zugeordnet und aus den charakteristischen linearen Abmessungen errechnet werden kann. Die ermittelten Werte für die Flächeninhalte der Teilflächenstücke werden anschließend addiert.[18]

Die Niederlegung der erfassten Strukturinformation auf der Tontafel zeigt ein hohes Maß an Abstraktion. Zum einen durch die Abbildung eines Teils der Wirklichkeit in ein standardisiertes Darstellungsformat: Der Raum wird auf die rein geometrische Information reduziert, aus dem realen wird ein abstrakter Raum. Die Entwicklung eines solchen von der physikalischen Realität losgelösten Raumkonzepts erfordert und befördert eine grundsätzliche geistige Auseinandersetzung mit dem Wesen des umgebenden Raums.

Zum anderen erfordert die Erstellung dieser Art von Plänen eine Veränderung der Perspektive, und zwar von der desjenigen, der auf der Aktionsoberfläche steht und sich in ihr bewegt, hin zu einer Vogelperspektive, einer Draufsicht wie aus hoher Höhe; hin zu einer Perspektive also, die der Mensch damals *realiter* überhaupt nicht einnehmen konnte. Dieser Perspektivenwechsel wurde auch bei der Darstellung anderer realräumlicher Entitäten vollzogen, wie man etwa bereits an einer aus altakkadischer Zeit (ca. Mitte des 24. bis Mitte des 22. Jahrhunderts v. Chr.) stammenden Landkarte[19] und später an dem berühmten Stadtplan von Nippur[20] (um 1500 v. Chr.) sehen kann. In diesem Zusammenhang sei noch auf die so genannte babylonische Weltkarte (Sippar, 7.-6. Jhd. v. Chr.) aus spätbabylonischer Zeit[21] hingewiesen, auf der die Vorstellung von der Gestalt der Welt schematisch skizziert ist.[22] In unserem Kontext interessant ist dabei weniger diese Vorstellung selbst, als vielmehr die Tatsache, dass hier sogar die ganze Welt als etwas in

17 Ein Beispiel ist JON 40, Privatsammlung. Publiziert in Brunke 2012a. Foto und weitere Informationen auf CDLI (Cuneiform Digital Library Initiative) unter `http://cdli.ucla.edu/P432384`.

18 Interessanterweise treten in diesen Feldplänen keine irregulären Vierecke auf bzw. werden sie nicht durch die Anwendung des oben vorgestellten Berechnungsverfahrens als solche angesprochen. Das Feld wird in einen aus einem oder mehreren großen Vierecken bestehenden Innenbereich und den verbleibenden Rand zerlegt, letzterer wiederum in eine Vielzahl von Rechtecken und (zumindest näherungsweise) rechtwinkligen Dreiecken und Trapezen. Die den Innenbereich des Feldes konstituierenden Vierecke sind zwar in der Regel *de facto* irregulär, doch werden sie auf jeweils zweierlei Weise als Rechtecke oder rechtwinklige Trapeze aufgefasst (bzw. approximiert). Von den sich ergebenden je zwei Flächenwerten wird dann der Mittelwert gebildet (dieses Verfahren wurde von Quillien 2003 rekonstruiert; reproduziert z.B. in Friberg 2007, 143–44; vgl. auch Brunke 2012a, 48). Unterstellt man für den Moment, dass man das oben diskutierte Verfahren zur Berechnung irregulärer Vierecke tatsächlich auf die vorgeschlagene Art über das Abzählen von Pflanzreihen gewonnen habe, ließe sich seine Abwesenheit in der Praxis der Vermessung und Erfassung solch großer Feldeinheiten (die Kantenlängen konnten mehrere Kilometer betragen) vielleicht mit der mangelnden Praktikabilität erklären und auch damit, dass die vermessenen Feldeinheiten oft zu großen Teilen brach lagen (vgl. z.B. Brunke 2012a, 53) und somit überhaupt keine Pflanzreihen enthielten.

19 Autographie z.B. in Walker 1991, 256, Foto in Rochberg 2012, 30.

20 HS 197 (Hilprecht-Sammlung Vorderasiatischer Altertümer Jena). Fotographie z.B. in Walker 1991, 257; Rochberg 2012, 27.

21 Fotographie z.B. in Walker 1991, 256; Rochberg 2012, 33.

22 Für eine vollständige Bearbeitung und Diskussion siehe Horowitz 1998, 20–42. – Ausführliche und umfangreiche Betrachtungen zu Karten und Plänen im alten Mesopotamien findet man in Rochberg 2012 und der dort genannten Literatur.

seiner Gesamtheit aus einer völlig anderen Perspektive als der der realen Beobachtung zugänglichen Denk- und Vorstellbares thematisiert ist.[23]

Und schließlich wird die geometrische Erscheinung des betrachteten Raumausschnitts bei der Abbildung verändert. Die Darstellung komplizierterer Feldstrukturen ist im Allgemeinen nicht maßstäblich, d.h. insbesondere nicht winkeltreu. Zeichnung und Beischrift dienen der Darstellung zweier grundsätzlich verschiedener Informationsarten: die Inzidenzstruktur-Information[24] und die metrische Information. Dabei wird auf der grafischen Ebene lediglich die Inzidenzstruktur des Teilflächenkomplexes, als der die Gesamtfläche dargestellt wird, exakt wiedergegeben. Längenverhältnisse und Winkel können grob verzerrt sein, lediglich (zumindest näherungsweise) parallel oder senkrecht zueinander verlaufende Linien werden meist auch so abgebildet. Die Beischriften zu den Begrenzungs- und Zerlegungslinien und den durch sie definierten Flächenstücken (Längen- und Flächeninhaltsangaben) geben die auf der grafischen Ebene fehlenden metrischen Informationen. Die Kombination aus Zeichnung und Beschriftung liefert die gesamte für die Belange der Verwaltung erforderliche geometrische Information.[25] Der Grund für die nicht maßstäbliche Abbildung war im Wesentlichen die Notwendigkeit, die teilweise sehr unregelmäßig geformten und langgezogenen Flächen auf einer Tafel standardisierter Größe abbilden zu können.[26]

Abschließend ist festzuhalten, dass die exakte Vermessung und quantitative Behandlung von Flächen im Rahmen der „Aktionsfläche im Kleinen“ bereits früh ausgiebig praktiziert und Methoden hierfür entwickelt wurden. Diese Art der Erfassung und die sich darin wiederspiegelnde Wahrnehmung des unmittelbar umgebenden Raums als etwas „Flächiges“ lässt sich indes für die „Aktionsfläche im Großen“ nicht nachweisen. Flächenmessung oder die Angabe von Flächengrößen für übergeordnete, große Gebietsstrukturen scheinen zu fehlen. Das Bewusstsein der Flächigkeit spiegelt sich lediglich in Formulierungen wie „das Land zwischen X und Y“, wobei X und Y irgendwelche Grenzmarken wie Flüsse, Bergketten o.ä. bezeichnen. Insgesamt kann man vielleicht sagen, dass die Wahrnehmung des Raums, soweit sie sich in der Dokumentation widerspiegelt, lokal flächig war, im Großen dagegen eher die eines Systems von Linien und Punkten (Wegen und Orten).

23 Ein bemerkenswertes Beispiel ganz anderer Art für die extrapolierte Draufsicht auf die Welt findet sich im sumerischen Etana-Epos. Es berichtet von Etana, dem König von Kisch, der mit einem Adler in den Himmel reist und dabei den Anblick des Landes aus einer, zwei und drei Meilen Höhe beschreibt (eine sumerische Meile entspricht ca. 10,8 km), hier wiedergegeben in der Fassung der neuassyrischen Überlieferung in der Übersetzung von Horowitz 1998, 53: in einer Meile Höhe (29–30) „Lo, the land stands by the mountain. The sea has turned into waters.“, in zwei Meilen Höhe (34) „Land (and) wa[ter]s!“, und in drei Meilen Höhe (38) „The sea has turned into the ditch of a gard[ener.]“ Für eine ausführliche Bearbeitung und Besprechung dieses Textes siehe Horowitz 1998, 43–66. Beachte insbesondere 43, Fußnote 2: „Although no Sumerian Examples of Etana have been identified, the story of Etana and the Eagle's flight to heaven, at least, must have circulated in the third millennium, because Etana's ascent to heaven is recorded in *The Sumerian King List*. . .“

24 Das ist die Information über die Struktur des Systems aus den Linien, die die Feldfläche begrenzen oder sie in kleinere Teile zerlegen, und den Punkten, in denen diese Linien zusammentreffen. In der Literatur wird in diesem Zusammenhang oft nicht ganz korrekt von der „Topologie“ oder „topologischer Information“ des Feldes gesprochen, um – in Abgrenzung zu den Begriffen „Geometrie“ bzw. „geometrisch“ – auf das Fehlen metrischer Informationen in Form von Proportionalität und Winkeltreue in den Zeichnungen hinzuweisen. Was die Zeichnungen indes wiedergeben, ist nicht die Topologie des Feldes selbst, sondern die des angesprochenen Systems von Linien und Punkten.

25 Für maßstäbliche Rekonstruktionen solcher Felder siehe Liverani 1990.

26 Siehe Liverani 1990.

4 Abstrakte Räume

Das oben zur Abstraktion in der Anlage der Feldpläne Gesagte zeigt, dass die ihrer Darstellung zugrunde liegenden Prinzipien als ein Ausgangspunkt für die Entwicklung hin zur Beschäftigung mit räumlicher Struktur an sich angesehen werden können. Gewissermaßen als Zwischenschritt in dieser Entwicklung können die mathematischen Feldteilungsaufgaben verstanden werden, Aufgaben aus der mathematischen Schreiberausbildung, die einerseits bereits von realen vermessungs- und verwaltungstechnischen Problemstellungen abstrahieren, besonders durch Idealisierung, andererseits aber noch deutlich den Bezug zur und ihren Ursprung in der Vermessungs- und Verwaltungspraxis erkennen lassen. Geometrische Figuren und Strukturen werden nun zunehmend um ihrer selbst willen betrachtet, als eigenständige Entitäten, die, wenngleich der realen Welt entnommen, des Bezugs zu ihr nicht mehr bedürfen. Schließlich werden neue Formen und Figuren untersucht, die im realen Raum, in der realen Aktionsfläche, gar nicht unmittelbar auftreten und auch nicht mittelbar als Modell der praktischen Realität dienen. Als Beispiele hierfür seien angeführt reguläre Fünfecke und Siebenecke oder durch verschiedene, mehr oder weniger komplexe Kreisbogenkombinationen begrenzte Figuren, wie sie auf der Rückseite der altbabylonischen Aufgabensammlung BM 15285[27] zu sehen sind. Neben der grafischen Darstellung der Figuren findet sich dort jeweils eine Konstruktionsbeschreibung und die Frage nach dem Flächeninhalt der Figuren, was zeigt, dass man über ein Konzept für die Zuweisung eines Flächeninhaltes auch an derartige komplexe und teilweise krummlinig begrenzte Flächenstücke verfügte, auch wenn in diesem Text keine Lösungen zu den Aufgaben gegeben werden.

Wie bereits erwähnt, ist die Entwicklung der geometrischen Einsichten und Konzepte wesentlich von der Abstraktion auf der Ebene der graphisch-schriftlichen Darstellung beeinflusst. Damit sind es die Feldpläne, also die „Verschriftlichung“ des Raumes, und nicht etwa bereits der Tatbestand der Feldmessung selbst, die als Mitauslöser für die Entwicklung einer verallgemeinernden und zunehmend abstrahierenden Mathematik und Strukturerforschung anzusehen sind. In dieser impulsgebenden Wirkung liegt die große Bedeutung der notationellen Umsetzung realräumlicher Entitäten. Durch sie kann der erfasste Raum manipuliert und die Möglichkeiten seiner Erweiterung und Veränderung systematisch und ohne Bezugnahme auf eine „reale Existenz“ der entstehenden Konstellationen untersucht werden.

Als Beispiel für die Durchführung solcher Manipulationen des Raumes zur Lösung abstrakter mathematischer Fragestellungen soll eine Aufgabe der altbabylonischen mathematischen Sammeltafel BM 13901[28] vorgestellt werden. Es handelt sich (in moderner Terminologie) um ein quadratisches Gleichungssystem in zwei Unbekannten. Die sprachliche Darstellung der Aufgabe ist (wie in modernen mathematischen Abhandlungen auch) äußerst knapp gehalten und beschränkt sich ganz auf die wesentlichen Informationen. Es fehlt sogar die explizite Formulierung der Frage nach den gesuchten Größen. Die

27 BM 15285 ist eine beidseitig beschriebene Sammeltafel mit fünf Kolumnen auf beiden Seiten. Jede Kolumne enthält mehrere geometrischen Aufgaben, die alle aus einer Zeichnung einer ebenen Figur und einer verbalen Beschreibung ihrer Konstruktion bestehen. Es wird nach den Flächeninhalten der Figuren und ihrer Bestandteile gefragt, der Text gibt aber weder die Ergebnisse noch gar einen Lösungsweg an. Für eine vollständige Bearbeitung des neu kollationierten Textes inclusive Handkopie und Publikationsgeschichte siehe Robson 1999, 208–17. Eine Fotographie der Vorderseite findet sich in Walker 1991, 250 unten, ein Foto von Vorder- und Rückseite des damals bekannten Fragments in Neugebauer 1935b, Tafeln 3–4.

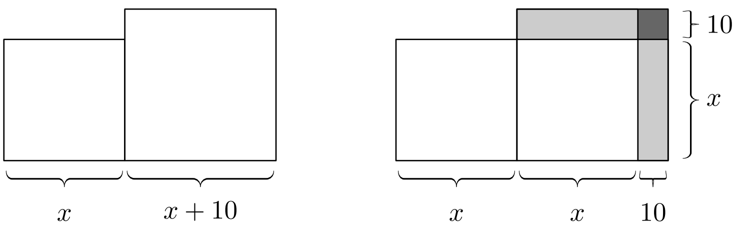
28 BM 13901 ist eine umfangreiche Sammlung mathematischer Aufgaben, insbesondere mit (Systemen von) Gleichungen in einer oder mehreren Unbekannten. Der Text wurde erstmals in Thureau-Dangin 1936a, 27ff. und Thureau-Dangin 1936b, 83–84 und nochmals in Thureau-Dangin 1938, 1–10 untersucht und von Neugebauer 1937, 1–14 völlig neu ediert. Eine detaillierte Betrachtung der hier betrachteten Aufgabe (Aufgabe 9: Vorderseite col ii, 3-10) findet sich bei Høyrup 2002, 67–70.

Übersetzung gibt in Klammern gesetzt einige das Verständnis erleichternde Ergänzungen. Die einzelnen Zeilen (a bis m) geben jeweils einen Schritt der Aufgabenstellung bzw. des Lösungsverfahrens an; sie entsprechen nicht der Zeileneinteilung im Keilschrifttext. Die Sexagesimalzahlen des Originaltexts sind in Dezimalzahlen umgerechnet.

a) *Die Flächen meiner zwei Quadrate habe ich addiert und 1300 (kam heraus).*
b) *(Eine) Quadratseite überragt (die andere) Quadratseite um 10.*
(Wie groß sind die Quadrate?)
c) *Du brichst die Hälfte von 1300 ab.*
d) *Du notierst (als Ergebnis) 650.*
e) *Du brichst die Hälfte von 10 ab.*
f) *Du multiplizierst (das Ergebnis) 5 mit (dem Ergebnis) 5.*
g) *Du reißt (die resultierende) 25 aus der (in Schritt (d) notierten) 650 heraus.*
h) *(Vom Ergebnis) 625 die Quadratwurzel: 25.*
i) *Du notierst (diese) 25 zweimal.*
j) *Du addierst die 5, die du (in Schritt (f)) quadriert hast, zu der einen (in Schritt (i) notierten) 25*
k) *und (das Ergebnis) 30 ist (die erste) Quadratseite.*
l) *Du ziehst die 5 (die du in Schritt (f) quadriert hast) von der zweiten (in Schritt (i) notierten) 25 ab*
m) *und (das Ergebnis) 20 ist die zweite Quadratseite.*

Die folgenden Abbildungen zeigen die geometrische Idee, die vermutlich hinter diesem Lösungsverfahren steht.[29]

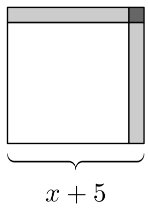
Das größere der beiden Quadrate kann man sich zusammengesetzt denken aus einem Quadrat von derselben Größe des kleineren Quadrates (weiß, seine unbekannte Kantenlänge wird mit x bezeichnet), zwei Streifen der Dicke 10 rechts und oben (hellgrau), und einem Quadrat mit Kantenlänge 10 in der rechten oberen Ecke (dunkelgrau).



Die Gesamtfläche der Figur (also großes und kleines Quadrat zusammen) kann halbiert werden (d.h. die Hälfte davon wird „abgebrochen“), indem eines der beiden weißen Quadrate, die Hälfte eines jeden der beiden hellgrauen Streifen und zwei Viertel des dunkelgrauen Quadrats entfernt werden (Schritt c).

Jedes der beiden verbleibenden dunkelgrauen Teilquadrate hat die Kantenlänge 5. Wird eines von ihnen „herausgerissen“ (Schritt g), bleibt ein Quadrat mit Kantenlänge $x + 5$ übrig:

29 Vgl. Høyrup 2002, 68–70 und 67, Figure 10.



Wird aus der Fläche dieses Quadrates die Wurzel gezogen (Schritt h), erhält man seine Kantenlänge $x + 5$. Dieses Zwischenergebnis wird „zweimal notiert“ (Zeile i) und zwei verschiedenen Operationen unterzogen: Addition von 5 (Schritt j) resultiert in $x+10$, der Kantenlänge des großen Quadrats (Zeile k); Subtraktion von 5 (Schritt l) liefert dagegen x, die Kantenlänge des kleineren Quadrats (Zeile m).

Abschließend ist noch ein fundamentales Prinzip des geometrischen Denkens in Mesopotamien anzusprechen: die Festlegung bzw. Bestimmung des Größenwerts (Inhalts) eines geometrischen Objekts durch Mittelung der Inhalte einfacherer Objekte, die kleiner bzw. größer sind als das betrachtete. Diese Vorgehensweise findet sich von Anfang an bei der Berechnung des Flächeninhalts des Trapezes. Hier wird der Mittelwert der beiden parallelen Seiten mit der Höhe multipliziert, was darauf hinausläuft, den Mittelwert der Flächeninhalte von dem Trapez einbeschriebenem und umbeschriebenem Rechteck zu bilden (Abb. 5).

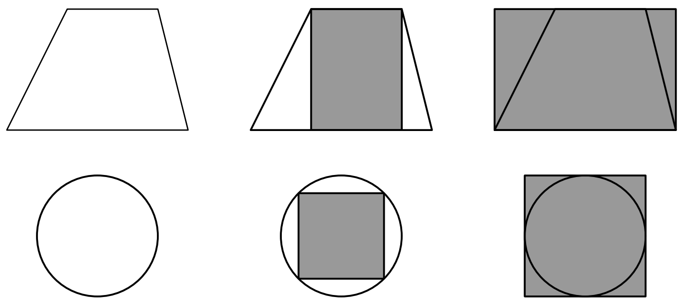


Abb. 5 | Ein Trapez mit einbeschriebenem und umbeschriebenem Rechteck und ein Kreis mit einbeschriebenem und umbeschriebenem Quadrat.

In den mathematischen Texten ab altbabylonischer Zeit wird diese Methode per Analogieschluss auf die Berechnung des Rauminhalts von Körpern übertragen, die in gewisser Weise „trapezähnlich“ sind. So berechnete man etwa das Volumen eines Kegelstumpfes (der Aufriss ist ein Trapez), indem der Mittelwert der Flächeninhalte von Boden- und Deckfläche gebildet und dieser mit der Höhe multipliziert wurde.[30] Ähnlich verfuhr man bei der Berechnung des Volumens einer ansteigenden Rampe mit trapezförmigem Querschnitt und mit vom einen zum anderen Ende hin sich veränderndem Böschungswinkel.[31] Zwar stimmt das Ergebnis in beiden Fällen nicht mit dem nach heutigem Verständnis korrekten überein, doch mögen diese Beispiele auch die große Bedeutung der Analogiebildung als erkenntnisproduzierendes Verfahren in der mesopotamischen Wissenschaft illustrieren. Es spricht einiges dafür, dass man auch bei der Festsetzung des Flächeninhalts des Kreises so vorgegangen ist und ihn als den Mittelwert der Flächeninhalte von einbeschriebenem und umbeschriebenem Quadrat festgelegt hat (Abb. 5),

30 BM 85194, VS iii 23–30, Neugebauer 1935a, 176.
31 BM 85194, VS i 1–12, Neugebauer 1935a, 165; Brunke 2012b, 19–21.

was auch die in der babylonischen Mathematik übliche Festsetzung dessen, was wir als die Zahl π bezeichnen, auf den Wert 3 erklärt, der damit insbesondere nicht lediglich eine grobe Näherung von π ist.[32] Dies mag exemplarisch einen Eindruck davon vermitteln, dass die Praxis der Feldvermessung mit ihren Methoden zur Berechnung von Trapezen und unregelmäßigen Vierecken bereits früh ein charakteristisches Element des mesopotamischen Verständnisses von Maß und Inhalt, und damit ein wichtiges Element des Verständnisses von Raum offenbart.

32 Brunke 2011.

Literaturverzeichnis

Brunke 2011
H. Brunke. „Überlegungen zur babylonischen Kreisrechnung". *Zeitschrift für Assyriologie und Vorderasiatische Archäologie* 101 (2011), 113–126.

Brunke 2012a
H. Brunke. „Ein neuer Ur III-zeitlicher Feldplan". In *Altorientalische Studien zu Ehren von Pascal Attinger*. Hrsg. von S. Ecklin und C. Mittermayer. Fribourg, Göttingen: Academic Press, Vandenhoeck & Ruprecht, 2012, 39–63.

Brunke 2012b
H. Brunke. „On Mesopotamian Measure Theory". In *Productive Errors: Scientific Concepts in Antiquity*. Hrsg. von M. Geller und K. Geus. Berlin: Max-Planck-Institut für Wissenschaftsgeschichte, 2012, 9–22.

Clay 1915
A. T. Clay. *Miscellaneous Inscriptions in the Yale Babylonian Collection*. Yale Oriental Series. Babylonian Texts 1. New Haven: Yale University Press, 1915.

Damerow 2001
P. Damerow. „Kannten die Babylonier den Satz von Pythagoras?" In *Changing Views on Ancient Near Eastern Mathematics*. Hrsg. von J. Høyrup und P. Damerow. Berliner Beiträge zum vorderen Orient 19. Berlin: Dietrich Reimer Verlag, 2001, 219–310.

Edzard 1976-80
D. O. Edzard. „Itinerare". In *Reallexikon der Assyriologie und Vorderasiatischen Archäologie*. 5. 1976-80.

Englund und Grégoire 1991
R. K. Englund und J.-P. Grégoire. *The Proto-Cuneiform Texts from Jemdet Nasr*. Materialien zu den frühen Schriftzeugnissen des Vorderen Orients 1. Berlin: Gebr. Mann Verlag, 1991.

Englund und Nissen 2001
R. K. Englund und H. J. Nissen. *Archaische Verwaltungstexte aus Uruk. Die Heidelberger Sammlung*. Archaische Texte aus Uruk 7. (= ADFU 17). Berlin: Gebr. Mann Verlag, 2001.

Friberg 2007
J. Friberg. *A Remarkable Collection of Babylonian Mathematical Texts; Manuscripts in the Schøyen Collection; Texts I*. Springer Science+Business Media, LLC, 2007.

Green und Nissen 1987
M. W. Green und H. J. Nissen. *Zeichenliste der archaischen Texte aus Uruk*. Archaische Texte aus Uruk 2. (= ADFU 11). Berlin: Gebr. Mann Verlag, 1987.

Horowitz 1998
W. Horowitz. *Mesopotamian Cosmic Geography*. Mesopotamian Civilisations 8. Winona Lake, Indiana: Eisenbrauns, 1998.

Høyrup 2002
J. Høyrup. *Lengths, Widths, Surfaces. A Portrait of Old Babylonian Algebra and its Kin*. New York, Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2002.

Langdon 1928
S. Langdon. *Pictographic Inscriptions from Jemdet Nasr*. Oxford Editions of Cuneiform Texts 7. Oxford: Clarendon Press, 1928.

Liverani 1990
M. Liverani. „The Shape of Neo-Sumerian Fields". *Bulletin on Sumerian Agriculture* 5 (1990), 147–186.

Neugebauer 1935a
O. Neugebauer. *Mathematische Keilschrifttexte. Erster Teil*. Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik 3. Berlin: Springer-Verlag, 1935.

Neugebauer 1935b
O. Neugebauer. *Mathematische Keilschrifttexte. Zweiter Teil*. Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik 3. Berlin: Springer-Verlag, 1935.

Neugebauer 1937
O. Neugebauer. *Mathematische Keilschrifttexte. Dritter Teil*. Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik 3. Berlin: Springer-Verlag, 1937.

Nissen, Damerow und Englund 1991
H. J. Nissen, P. Damerow und R. K. Englund. *Frühe Schrift und Techniken der Wirtschaftsverwaltung im alten Vorderen Orient. Informationsspeicherung und -verarbeitung vor 5000 Jahren*. 2. Aufl. Bad Salzdetfurth: Verlag Franzbecker und Max-Planck-Institut für Bildungsforschung, 1991.

Quillien 2003
J. Quillien. „Deux cadastres de l'époque d'Ur III". *Revue d'histoire des mathématiques* 9 (2003), 9–31.

Robson 1999
E. Robson. *Mesopotamian Mathematics, 2100-1600 BC. Technical Constants in Bureaucracy and Education*. Oxford Editions of Cuneiform Texts 14. Oxford: Clarendon Press, 1999.

Robson 2008
E. Robson. *Mathematics in Ancient Iraq*. Princeton: Princeton University Press, 2008.

Rochberg 2012
F. Rochberg. „The Expression of Terrestrial and Celestial Order in Ancient Mesopotamia". In *Ancient Perspectives. Maps and Their Place in Mesopotamia, Greece & Rome*. Hrsg. von R. J. A. Talbert. Chicago und London: The University of Chicago Press, 2012, 9–46.

Thureau-Dangin 1936a
F. Thureau-Dangin. „L'équation du deuxième degré dans la mathématique babylonienne". *Revue d'Assyriologie* 33 (1936), 27–48.

Thureau-Dangin 1936b
F. Thureau-Dangin. „Textes mathématiques babyloniens". *Revue d'Assyriologie* 33 (1936), 65–84.

Thureau-Dangin 1938
F. Thureau-Dangin. *Textes Mathématiques Babyloniens*. Leiden: E. J. Brill, 1938.

Walker 1991
C. B. F. Walker. „Wissenschaft und Technik". In *Der alte Orient. Geschichte und Kultur des alten Vorderasiens*. Hrsg. von B. Hrouda. München: C. Bertelsmann, 1991, 247–269.

Hagan Brunke

Studium der Physik und der Mathematik an der Technischen Universität München, Diplom in Physik (1993), Promotion zum Dr.rer.nat. im Fach Mathematik an der Ludwig-Maximilians-Universität München (1998). Studium der Assyriologie mit Nebenfach Ägyptologie an der Ludwig-Maximilians-Universität München, Promotion zum Dr.phil. im Fach Assyriologie (2008). Forschungstätigkeit an den Instituten für Mathematik und Altorientalistik an der LMU München, der FU Berlin und der HU zu Berlin und Arbeit als Projektleiter in der Anwendungsentwicklung. Spezielle Forschungsinteressen sind neusumerische Verwaltungstexte und Mesopotamische Mathematik.

Hagan Brunke studied Physics (Diploma 1993, Technische Universität München) and Mathematics (PhD 1998, Ludwig-Maximilians-Universität München) as well as Assyriology with Egyptology as minor (PhD 2008, Ludwig-Maximilians-Universität München). He has been working as a researcher in Mathematics and Ancient Oriental Studies in Munich and Berlin and as a project manager in application development. His main research interests are Sumerian economy, especially of the Ur III period, and Mesopotamian mathematics.

Hagan Brunke
Freie Universität Berlin
Institut für Altorientalistik
Fabeckstr. 23–25
D-14195 Berlin, Deutschland

brunke@zedat.fu-berlin.de